ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Éducation Nationale
AREF Marrakech – Safi
DP : Marrakech
Lycée Qualifiant Toubkal

SAKINE.PRO

1ère Année Bac_Sc

Année Scolaire : 2026 – 2027

Matière : **Mathématiques**
Enseignant :
Pr. SAKINE BADR

SÉRIE D'EXERCICES N° 02 : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

ENSEMBLE DE DÉFINITION • PARITÉ • VARIATIONS • COMPARAISON • BORNES • EXTREMUMS • FONCTIONS DE RÉFÉRENCE • COMPOSÉE • PÉRIODICITÉ

★ Application directe ★★ Entraînement ★★★ Approfondissement

Exercice 1 — Ensemble de définition

Cours § II ★

Déterminer l'ensemble de définition D_f de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-4}$

3) $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^2-4}$

4) $f(x) = \dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$

5) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

7) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x} + \sqrt{-x}$

8) $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x^2+1}$

9) $f(x) = \dfrac{}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

10) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$

11) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$

12) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$

Exercice 2 — Égalité de deux fonctions

§ I–II ★

Dans chaque cas, dire si les deux fonctions sont égales. Justifier.

1. $h(x) = \dfrac{x^2-x}{x}$ et $t(x) = x-1$.
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$.

Exercice 3 — Étude de la parité

§ III ★

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 5$

2) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

4) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

5) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$

6) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

7) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+5}$

8) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4}$

Exercice 4 — Parité et équation fonctionnelle

§ III ★★

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x :

$$5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$$

1. Montrer que f est une fonction impaire.
2. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

Exercice 5 — Taux de variation

§ IV ★

Étudier, avec le taux de variation, les variations de :

1. $f(x) = 7x - 5$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \dfrac{2}{x}$ sur $]0;+\infty[$ puis sur $]-\infty;0[$.
3. $h(x) = 3x^2 + 2$ sur $[0;+\infty[$ puis sur $]-\infty;0]$.

Exercice 6 — Variations d'un quotient

§ IV ★★

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Montrer que le taux de variation de g est $T_g = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$.
2. En déduire les variations de g sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 7 — Étude de $x + \frac{1}{x}$

§ III–IV ★★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer D_f et étudier la parité de f.
2. Montrer que $T_f = \dfrac{x_1x_2 - 1}{x_1x_2}$.
3. Étudier les variations de f sur $]0;1]$ puis sur $[1;+\infty[$.
4. En déduire les variations sur $]-\infty;0[$ et dresser le tableau de variations de f.

Exercice 8 — Comparaison de fonctions

§ V ★

1. Comparer $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2+x+2$ sur $\mathbb{R}$, en étudiant le signe de $g(x) - f(x)$.
2. Comparer $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ puis sur $]-\infty;0[$. Préciser les points d'intersection des deux courbes.

Exercice 9 — Fonctions majorées, minorées, bornées

§ V ★

1. Montrer que $f(x) = -x^2 + x$ est majorée par $\dfrac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $g(x) = 4\sin x - 3$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout réel x : $0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$.

Exercice 10 — Encadrement d'une fonction rationnelle

Cours § V ★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$.

1) Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$.

2) Montrer que f est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est majorée par $\dfrac{7}{3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 — Extremums d'une fonction

§ VI ★

1. Montrer que $f(x) = 5x^2+3$ admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $g(x) = -4x^2+1$ admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $k(x) = -4x^2+4x+5$. Vérifier que $k(x) = 6-(2x-1)^2$, puis en déduire le maximum absolu de k sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 — Majorant ou maximum ?

§ V–VI ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est majorée par 3. Le nombre 3 est-il un maximum de f ?
2. Montrer que f est minorée par 2. Le nombre 2 est-il un minimum de f ?

Exercice 13 — Extremums et radicaux

§ VI ★★★

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$.

1. Montrer que -1 est le minimum absolu de f.
2. Montrer que f est majorée par 1. Le nombre 1 est-il un maximum de f ?

Exercice 14 — Trinôme et parabole

§ VII ★

Soit $f(x) = 2x^2-4x-2$ et $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique. En déduire le sommet S et l'axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
2. Dresser le tableau de variations de f et tracer $(\mathcal{C}_f)$.
3. Reprendre les questions 1 et 2 pour la fonction g.

Exercice 15 — Fonction homographique

§ VII ★★

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Déterminer D_f et vérifier que $f(x) = 2+\dfrac{3}{x-1}$.
2. Calculer le déterminant de f et dresser son tableau de variations.
3. Préciser le centre de symétrie Ω et les asymptotes de $(\mathcal{C}_f)$, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 16 — Composée de deux fonctions

§ VIII ★

1. Soit $f(x) = x^2-2x+3$ et $g(x) = 2x+1$. Calculer $(g\circ f)(x)$ et $(f\circ g)(x)$.
2. Soit $u(x) = 3x+4$ et $v(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Déterminer $D_{v\circ u}$, puis l'expression de $(v\circ u)(x)$.

Exercice 17 — Décomposition et variations

§ VIII ★★

1. Écrire sous la forme $g\circ f$ chacune des fonctions : $h_1(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ et $h_2(x) = \sqrt{x+3}$.
2. Soit $h(x) = \sqrt{1-x}$ sur $]-\infty;1]$. Décomposer h, puis en déduire son sens de variation et son tableau de variations.

Exercice 18 — Fonctions périodiques

§ IX ★★

1. Montrer que $\dfrac{\pi}{2}$ est une période de $f(x) = \sin(4x-1)$ et que $\dfrac{2\pi}{5}$ est une période de $g(x) = \cos(5x)$.
2. Soit h une fonction de période 2 telle que $h(x) = 2x-x^2$ pour tout $x\in[0;2[$. Calculer $h(4{,}5)$, $h(-3{,}5)$ et $h(2027)$.

Exercice 19 — Parabole et droite

§ X ★★

Soit $f(x) = x^2-3x-4$ et $g(x) = 3x+12$, de courbes $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

1. Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement.
3. Résoudre l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

Exercice 20 — Problème de synthèse

§ VII–VIII ★★★

Soit $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$, $h(x) = x^2+2$ et $f(x) = \dfrac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$.

1. Étudier les variations de g et de h, puis le signe de $g(x)$.
2. Montrer que $f = h\circ g$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3. En déduire les variations de f sur $]1;+\infty[$, sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron : c'est en s'entraînant régulièrement que l'on progresse en mathématiques. »