Royaume du Maroc
Ministère de l'Éducation Nationale
AREF Marrakech-Safi • DP : Marrakech
Lycée Qualifiant Toubkal

SAKINE PRO

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Résumé du Cours • L'Essentiel 1 Bac

Année Scolaire : 2026/2027
Niveau : **1ère Année Bac - Sciences**
Matière : Mathématiques
Enseignant : **Pr. SAKINE BADR**

I. Notion de Fonction Numérique

Fondements

1. Fonction, image, antécédent

Définition

- Une **fonction** f associe à chaque réel x de son domaine D_f **un seul** réel noté $f(x)$.
- $f(x)$ est l'**image** de x. Tout réel x tel que $f(x) = y$ est un **antécédent** de y.
- **Exemple :** $f(x) = 3x^2 - 1$. Image de $\sqrt{2}$: $f(\sqrt{2}) = 3 \times 2 - 1 = 5$. Antécédents de 2 : $3x^2 - 1 = 2 \iff x^2 = 1 \iff x \in \{-1, 1\}$.

En clair : une image se **calcule** (on remplace x) ; un antécédent se **cherche** (on résout une équation).

2. Les familles de fonctions usuelles

Typologie

Famille	Forme
Polynôme	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
Rationnelle	$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (quotient de polynômes)
Homographique	$\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$
Irrationnelle	contient $\sqrt{u(x)}$
Circulaire	$\cos x$, $\sin x$, $\tan x$

II. Ensemble de Définition D_f

Méthode générale

Les conditions d'existence à connaître

Règles clés

Expression	Condition	Ensemble de définition
$P(x)$ (polynôme)	Aucune	$D_f = \mathbb{R}$
$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	Dénominateur non nul	$\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$
$\sqrt{P(x)}$	Radicande positif ou nul	$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \geq 0\}$
$\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	Radicande **strictement** positif	$\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) > 0\}$
$\sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	Quotient positif ou nul, $Q(x) \neq 0$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$
$\tan(ax+b)$	Le cosinus ne s'annule pas	$ax + b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

En clair : D_f est l'ensemble des x pour lesquels le calcul de $f(x)$ est possible. Deux interdits : **diviser par zéro** et prendre la **racine d'un nombre négatif**.

Méthode en 3 étapes

Méthode

1. **Repérer** les dénominateurs et les racines carrées.
2. **Écrire** chaque condition ($\neq 0$, ≥ 0 ou > 0) et la résoudre : factorisation, Δ, tableau de signes.
3. **Garder** les x qui vérifient *toutes* les conditions à la fois, puis écrire D_f en intervalles.

Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec deux racines) : signe de a **à l'extérieur** des racines, signe de $-a$ **entre** les racines.

Pièges : une racine au dénominateur impose > 0 (strict). Simplifier une fraction ne rend pas une valeur interdite : $\dfrac{x^2 - x}{x}$ n'est pas définie en 0.

Exemples à savoir refaire

Exemples

- $f(x) = \dfrac{x-5}{2x^2 - 5x - 3}$: $\Delta = 49$, racines 3 et $-\frac{1}{2}$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 3\}$.
- $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$: racines $\frac{1}{2}$ et 1, $a = 2 > 0$. Donc $D_f =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$.
- $f(x) = \sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$: tableau de signes avec $\frac{1}{3}$ et la valeur interdite -1. Donc $D_f =]-1, \frac{1}{3}]$.
- $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$: $x \geq \frac{1}{2}$ *et* $x \leq \frac{3}{5}$. Donc $D_f = [\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$.

III. Fonctions Paires et Fonctions Impaires

Parité

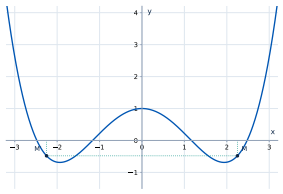
Condition préalable : D_f centré en zéro

À vérifier d'abord

D_f est **centré en** 0 si : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x \in D_f \implies -x \in D_f$. Centrés : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $[-4,4]$, $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Non centrés : $[0,+\infty[$, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $[-4,3]$.

Fonction paire

Symétrie / (Oy)



D_f centré en 0 et, pour tout $x \in D_f$:

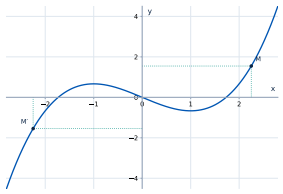
$$f(-x) = f(x)$$

La courbe est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.

Exemples : x^2, $|x|$, $\cos x$.

Fonction impaire

Symétrie / O



D_f centré en 0 et, pour tout $x \in D_f$:

$$f(-x) = -f(x)$$

La courbe est symétrique par rapport à l'**origine** O.

Exemples : x^3, $\dfrac{1}{x}$, $\sin x$, $\tan x$.

Méthode pour étudier la parité

Méthode

1. Déterminer D_f. S'il n'est **pas centré** : f n'est ni paire ni impaire, on s'arrête.
2. Calculer $f(-x)$ et simplifier.
3. Comparer : $f(-x) = f(x)$ (paire), $f(-x) = -f(x)$ (impaire), sinon ni l'un ni l'autre.

Opérations : somme de deux paires : paire ; de deux impaires : impaire. Produit ou quotient de **même parité** : pair ; de **parités différentes** : impair.

Quatre cas types

Exemples

$f(x)$	D_f	**Conclusion**
$3x^2 - 5$	$\mathbb{R}$	Paire : $f(-x) = f(x)$
$\dfrac{x^2-1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	Impaire : $f(-x) = -f(x)$
$2x^3 + x^2$	$\mathbb{R}$	Ni paire ni impaire
$\dfrac{x}{x-2}$	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	Ni l'un ni l'autre : domaine non centré

IV. Variations et Monotonie

Sens de variation

1. Sens de variation sur un intervalle I

Définitions

Strictement croissante :
$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
Elle conserve l'ordre.

Strictement décroissante :
$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
Elle inverse l'ordre.

Constante :
$f(x) = k$ pour tout $x \in I$
Monotone = croissante ou décroissante sur I.

2. Taux d'accroissement

Théorème clé

Pour $x_1 \neq x_2$ dans I :

$$T(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

- $T > 0$ pour tous $x_1 \neq x_2$ de $I \iff f$ **strictement croissante** sur I.
- $T < 0 \iff f$ **strictement décroissante** sur I.
- $T = 0 \iff f$ **constante** sur I.

En clair : on calcule T, on le factorise, puis on étudie son **signe** sur l'intervalle.

3. Raccourcis utiles

Propriétés

- f **paire :** variations *opposées* sur I et sur son symétrique $-I$.
- f **impaire :** variations *identiques* sur I et sur $-I$.
- Il suffit donc d'étudier f sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$, puis de déduire le reste.
- αf **:** même sens que f si $\alpha > 0$, sens contraire si α est négatif.
- $f + \alpha$ **:** toujours les mêmes variations que f.

Exemple modèle : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ — Étude complète

- **Parité :** $D_f = \mathbb{R}^*$ est centré et $f(-x) = -f(x)$: f est **impaire**. On étudie sur $]0, +\infty[$.
- **Taux :** $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)\dfrac{x_1x_2 - 1}{x_1x_2}$, d'où $T(x_1, x_2) = \dfrac{x_1x_2 - 1}{x_1x_2}$.
- Sur $]0, 1]$: $x_1x_2 < 1$, donc $T < 0$: f **décroissante**.
- Sur $[1, +\infty[$: $x_1x_2 > 1$, donc $T > 0$: f **croissante**.
- Par imparité : croissante sur $]-\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 0[$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2\ \searrow$	$\|\|$	$\searrow\ 2$	$\nearrow$

V. Comparaison, Fonctions Majorées, Minorées et Bornées — Encadrement

1. Égalité et comparaison — Définitions

- $f = g$: $D_f = D_g$ *et* $f(x) = g(x)$ pour tout x du domaine.
- $f \leq g$ **sur** I : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessous** de $(\mathcal{C}_g)$.
- $f \geq 0$ **sur** I : $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

Attention : $h(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ et $t(x) = x - 1$ ne sont **pas égales** : $D_h = \mathbb{R}^*$ mais $D_t = \mathbb{R}$.

2. Majorée, minorée, bornée — Définitions

- **Majorée** par M sur I : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$.
- **Minorée** par m sur I : $f(x) \geq m$ pour tout $x \in I$.
- **Bornée** : majorée et minorée, $m \leq f(x) \leq M$.
- Équivalent : il existe $K > 0$ tel que $|f(x)| \leq K$ sur I.

En clair : majorée = la courbe ne dépasse jamais un « plafond » ; minorée = elle ne descend jamais sous un « plancher ».

Quatre techniques pour majorer ou minorer — Méthodes et exemples

Technique	Exemple	Conclusion
Forme canonique	$-x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ et un carré est positif	$f(x) \leq \frac{1}{4}$
Encadrement connu	$-1 \leq \sin x \leq 1 \implies -7 \leq 4\sin x - 3 \leq 1$	Bornée sur $\mathbb{R}$
Signe de la différence $f(x) - M$	$\dfrac{2x^2+3}{x^2+1} - 3 = \dfrac{-x^2}{x^2+1} \leq 0$	$f(x) \leq 3$
Expression conjuguée	$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$ pour $x > 0$	$0 < f(x) < \frac{1}{2}$

VI. Extremums : Maximum et Minimum — Valeurs optimales

1. Définitions — Maximum et minimum

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in I$.
- **Extremum local :** maximum ou minimum sur un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant a.

À retenir : un maximum est un majorant **atteint**. Pour le prouver : 1) $f(x) \leq M$ sur I ; 2) l'équation $f(x) = M$ a une solution dans I.

2. Majorant ou maximum ? — Exemple

$f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1} = 2 + \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

- $f(x) \leq 3$ et $f(0) = 3$: 3 **est le maximum**.
- $f(x) > 2$ mais $f(x) = 2$ n'a pas de solution : 2 est un minorant, **pas un minimum**.

Sans dérivée : $-x^2 + 4x - 3 = 1 - (x-2)^2$, donc le maximum est 1, atteint en $x = 2$.

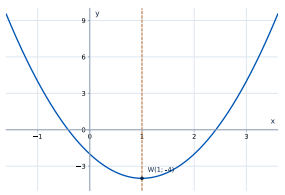
VII. Fonctions de Référence

Courbes à connaître

1. Trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Parabole

- **Forme canonique :** $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$.
- **Sommet** $W(\alpha, \beta)$: $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$. **Axe de symétrie :** $x = \alpha$.
- $a > 0$: décroissante puis croissante, β est le **minimum**.
- $a < 0$: croissante puis décroissante, β est le **maximum**.

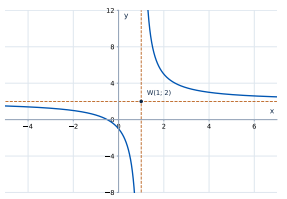


Exemple : $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$. $\alpha = 1$, $\beta = f(1) = -4$. Sommet $W(1, -4)$, axe $x = 1$, minimum -4.

2. Homographique $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$)

Hyperbole

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ et $\Delta = ad - bc \neq 0$.
- **Asymptotes :** $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$. **Centre de symétrie :** $W\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.
- $\Delta > 0$: strictement **croissante** sur chacun des deux intervalles de D_f.
- $\Delta < 0$: strictement **décroissante** sur chacun des deux intervalles.



Exemple : $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$. $W(1, 2)$, asymptotes $x = 1$ et $y = 2$. $\Delta = -3 < 0$: décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

3. Fonction cube et fonction racine

Synthèse

Fonction	Domaine	Sens de variation	Repère géométrique
$x \mapsto ax^3$, $a > 0$	$\mathbb{R}$	Strictement croissante	Impaire : symétrie de centre O
$x \mapsto ax^3$, $a < 0$	$\mathbb{R}$	Strictement décroissante	Impaire : symétrie de centre O
$x \mapsto \sqrt{x + a}$	$[-a, +\infty[$	Strictement croissante	Part du point $(-a, 0)$; minimum 0

VIII. Composée de Deux Fonctions $g \circ f$

Opération $g \circ f$

1. Définition et domaine

$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

- En général $g \circ f \neq f \circ g$: l'ordre compte.
- **Exemple :** $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = \frac{1}{x + 1}$. Il faut $3x + 4 \neq -1$, donc $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$ et $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x + 5}$.

En clair : on applique d'abord f, puis g au résultat. Il faut que $f(x)$ existe **et** que g accepte $f(x)$.

2. Variations de $g \circ f$

Règle des signes

f monotone sur I, g monotone sur J, avec $f(I) \subset J$:

f	g	$g \circ f$ **sur** I
↗	↗	**croissante**
↘	↘	**croissante**
↗	↘	**décroissante**
↘	↗	**décroissante**

Même sens : croissante. Sens contraires : décroissante.

Exemple : $h(x) = \sqrt{1 - x}$ sur $]-\infty, 1]$. $h = g \circ f$ avec $f(x) = 1 - x$ (décroissante, à valeurs dans $[0, +\infty[$) et $g(X) = \sqrt{X}$ (croissante). Donc h est **décroissante**.

IX. Fonctions Périodiques

Périodicité

1. Définition

Période $T > 0$

f est **périodique de période** T ($T > 0$) si, pour tout $x \in D_f$:

1. $x + T \in D_f$ et $x - T \in D_f$;
2. $f(x + T) = f(x)$.

La période est le plus petit $T > 0$ qui convient.

En clair : la courbe se **répète**. On la trace sur un intervalle de longueur T, puis on recopie le motif par translation.

2. Périodes à connaître

Formules clés

Fonction ($a \neq 0$)	Période	Exemple
$\cos(ax + b)$	$\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$\cos(5x) : T = \dfrac{2\pi}{5}$
$\sin(ax + b)$	$\dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$\sin(4x - 1) : T = \dfrac{\pi}{2}$
$\tan(ax + b)$	$\dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$\tan(3x) : T = \dfrac{\pi}{3}$

Calculer une image : si f est de période 2 et $f(x) = 2x - x^2$ sur $[0, 2[$, alors $4{,}1 = 2 \times 2 + 0{,}1$, donc $f(4{,}1) = f(0{,}1) = 0{,}19$.

X. Positions Relatives de Courbes et Lecture Graphique

Analyse graphique

1. Lire une équation ou une inéquation

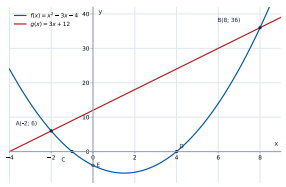
Règles

- $f(x) = g(x)$: abscisses des **points d'intersection** des deux courbes.
- $f(x) \geq g(x)$: abscisses des points où $(\mathcal{C}_f)$ est **au-dessus** de $(\mathcal{C}_g)$, intersections comprises.
- **Avec** (Ox) : résoudre $f(x) = 0$. **Avec** (Oy) : le point $(0, f(0))$ si $0 \in D_f$.

Par le calcul : étudier le signe de $f(x) - g(x)$. Positif : $(\mathcal{C}_f)$ au-dessus ; négatif : au-dessous. Inégalité stricte : bornes exclues.

2. Exemple : parabole et droite

Application



$f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$.

$f(x) = g(x) \iff x^2 - 6x - 16 = 0 \iff (x + 2)(x - 8) = 0$.

- Intersections : $A(-2, 6)$ et $B(8, 36)$.
- $f(x) \geq g(x) \iff x \in]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$.
- Avec les axes : $C(-1, 0)$, $D(4, 0)$ et $E(0, -4)$.

L'Essentiel en Six Réflexes

Bilan

Avant de rendre une copie

Check-list

- **Domaine d'abord :** vérifier les dénominateurs et les racines avant tout calcul.
- **Parité :** domaine centré, puis calcul de $f(-x)$. Elle réduit l'étude à $\mathbb{R}^+$.
- **Variations :** signe du taux d'accroissement, ou règle de la composée.
- **Maximum ou minimum :** prouver l'inégalité, puis donner un x qui réalise l'égalité.
- **Non majorée :** montrer que f dépasse n'importe quel réel fixé.
- **Graphique :** intersections pour une équation, courbe au-dessus ou au-dessous pour une inéquation.

Référence pédagogique. Cours de référence : « Fonctions - Généralités », 1ère Sciences expérimentales BIOF, Pr. Atmani Najib. Présentation, compléments et graphiques redessinés pour le cours de Pr. SAKINE BADR.

Ce résumé accompagne le cours complet : s'y reporter pour les démonstrations et les exercices corrigés.

Lycée Qualifiant Toubkal • Année Scolaire 2026/2027
Direction Provinciale de Marrakech • AREF Marrakech - Safi

Enseignant Responsable de la Matière :
Pr. SAKINE BADR