ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Éducation Nationale
AREF Marrakech – Safi
DP : Marrakech
Lycée Qualifiant Toubkal

SAKINE PRO
1ère Année Bac_Sc
Année Scolaire : 2026 – 2027

Matière : **Mathématiques**
Enseignant :
Pr. SAKINE BADR

SÉRIE D'EXERCICES N° 01 : NOTIONS DE LOGIQUE — CORRIGÉ

CORRIGÉ DÉTAILLÉ DES 20 EXERCICES • RÉDACTION TYPE

Exercice 1 — Tables de vérité ★

1.

P	$\overline{P}$	P ou $\overline{P}$
V	F	**V**
F	V	**V**

La dernière colonne ne contient que V :
« P ou $\overline{P}$ » est toujours vraie (loi du tiers exclu).

2.

P	Q	P et Q	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$ ou $\overline{Q}$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	F	**V**	F	V	**V**
F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

Les colonnes 4 et 7 sont identiques :
les deux propositions sont équivalentes

Exercice 2 — Écrire avec les quantificateurs ★

1. $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2 \geq 0$
2. $(\exists x \in \mathbb{R}),\ x > x^2$
3. Pour tout entier, il en existe un plus grand :
   $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}),\ m > n$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}),\ x \notin \mathbb{Q}$

Exercice 3 — Négation et valeur de vérité ★

Méthode. Pour nier : on échange $\forall$ et $\exists$, puis on nie la propriété. La négation de « $A \implies B$ » est « A et $\overline{B}$ ». Une proposition et sa négation ont des valeurs de vérité contraires.

1) Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}),\ x^2 \leq 0$.
Pour $x = 0$: $0^2 = 0$ n'est pas > 0.
Fausse

2) Négation : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2 - 2 \neq 0$.
$x = \sqrt{2}$ convient. **Vraie**

3) Négation : $(\exists n \in \mathbb{N}),\ \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$.
Pour $n = 1$: $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. **Fausse**

4) Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}),\ \cos x < -1$ ou $\cos x > 1$.
Propriété connue du cosinus. **Vraie**

5) Négation : $(\forall x \in \mathbb{Z}),\ \frac{x}{4} \notin \mathbb{Z}$.
$x = 4$ convient : $\frac{4}{4} = 1 \in \mathbb{Z}$. **Vraie**

6) Négation : $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}),\ n \geq m$.
Pour chaque n, on prend $m = n + 1$.
Vraie

7) Négation : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}),\ y^2 \neq x$.
Pour $x = -1$: aucun réel y ne vérifie $y^2 = -1$. **Fausse**

8) Négation : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}),\ x \leq y$.
La négation est vraie (prendre $y = x$).
Fausse

9) Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}),\ x^2 \geq 4$ et $x < 2$.
$x = -3$: $9 \geq 4$ et $-3 < 2$. **Fausse**

Exercice 4 — Raisonnement direct ★

1. Supposons $a^2 + b^2 = 0$. Alors $a^2 = -b^2 \leq 0$. Or $a^2 \geq 0$, donc $a^2 = 0$, c'est-à-dire $a = 0$. Il reste $b^2 = 0$, donc $b = 0$.
   $a = 0$ et $b = 0$
2. On écrit $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$. Alors
   $$a + b = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$
   avec $pq' + p'q \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{N}^*$. $a + b \in \mathbb{Q}$
3. Pour $x > 0$: $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$.
   $x + \frac{1}{x} \geq 2$

Exercice 5 — Démontrer une implication ★★

1. Supposons $\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}$. En multipliant par $1 + \sqrt{x} \neq 0$:
   $$1 = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = 1 - x$$
   donc $x = 0$
2. Supposons $a^2 + b^2 = 1$. On sait que $(a - b)^2 \geq 0$, donc $2ab \leq a^2 + b^2 = 1$. Alors
   $$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 1 + 1 = 2$$
   En prenant la racine carrée : $|a + b| \leq \sqrt{2}$

Exercice 6 — Raisonnement par équivalence ★★

1. $|x-1| \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2} \iff \frac{3}{2} \leq x+1 \leq \frac{5}{2}$.
Les trois membres sont strictement positifs et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc :
$$\frac{3}{2} \leq x+1 \leq \frac{5}{2} \iff \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$$
(Réciproquement, $\frac{1}{x+1} \geq \frac{2}{5} > 0$ impose $x+1>0$ et on peut repasser aux inverses.) **L'équivalence est démontrée.**
2. $\sqrt{x^2+1}$ existe pour tout réel x et est positif.
$$\sqrt{x^2+1} = 2x \iff \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2+1 = 4x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$
donc $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
$S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exercice 7 — Disjonction des cas (entiers) ★

1. **Cas 1 :** n pair, $n=2k$. Alors $n(n+1) = 2 \times k(n+1)$ est pair.
Cas 2 : n impair, $n=2k+1$. Alors $n+1 = 2(k+1)$ et $n(n+1) = 2 \times n(k+1)$ est pair.
Dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair.
2. Le reste de la division de n par 3 est 0, 1 ou 2 :
Cas 1 : $n=3k$: le facteur n est multiple de 3.
Cas 2 : $n=3k+1$: $n+2 = 3(k+1)$ est multiple de 3.
Cas 3 : $n=3k+2$: $n+1 = 3(k+1)$ est multiple de 3.
Dans tous les cas, $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3.

Exercice 8 — Disjonction des cas (valeur absolue) ★★

1. **Cas 1 :** $x \geq 1$, $|x-1| = x-1$.
$x^2 - x + 1 - (x-1) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$.
Cas 2 : $x < 1$, $|x-1| = 1-x$.
$x^2 - x + 1 - (1-x) = x^2 \geq 0$.
Dans les deux cas, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.
2. **Cas 1 :** $x \geq 1$. L'inéquation devient $3x - 4 \geq 0$, soit $x \geq \frac{4}{3}$.
Solutions : $\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$.
Cas 2 : $x < 1$. L'inéquation devient $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$: impossible avec $x < 1$.
$S = \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

Exercice 9 — Raisonnement par contraposée ★

Rappel. $(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$: on suppose le contraire de la conclusion et on démontre le contraire de l'hypothèse.

1. Contraposée : « n impair $\implies$ n^2 impair ».
Si $n = 2k+1$, alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$ est impair. **Donc n^2 pair $\implies$ n pair.**
2. Contraposée : « $\frac{x+2}{x+5} = 2 \implies x = -8$ ».
$\frac{x+2}{x+5} = 2 \implies x+2 = 2x+10 \implies x = -8$.
L'implication est démontrée.

Exercice 10 — Contraposée à deux variables ★★

1. Contraposée : « $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \implies x = y$ ».
$xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \implies 2y = 2x \implies x = y$. **Démontré.**
2. La négation de « $x \neq 2$ et $y \neq 2$ » est « $x = 2$ ou $y = 2$ ».
Contraposée : « $2x + 2y - xy - 2 = 2 \implies (x = 2 \text{ ou } y = 2)$ ».
$$\begin{aligned} 2x + 2y - xy - 4 = 0 &\iff xy - 2x - 2y + 4 = 0 \\ &\iff (x-2)(y-2) = 0 \end{aligned}$$
donc $x = 2$ ou $y = 2$. **Démontré.**

Exercice 11 — Raisonnement par l'absurde ★★

Rappel. On suppose que la conclusion est fausse et on aboutit à une contradiction.

1. Supposons $a \neq b$. L'égalité donne $a(1+a) = b(1+b)$, soit
$$a - b + a^2 - b^2 = 0 \iff (a-b)(1+a+b) = 0$$
Comme $a - b \neq 0$: $a + b = -1 < 0$. **Contradiction** avec $a > 0$ et $b > 0$. **Donc $a = b$.**
2. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n^2+1} = m$. Alors $m^2 - n^2 = 1$, soit $(m-n)(m+n) = 1$.
$m+n$ est un entier naturel et $m-n$ un entier : la seule possibilité est $m - n = m + n = 1$, d'où $n = 0$. **Contradiction** avec $n \in \mathbb{N}^*$. $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$

Exercice 12 — Irrationalité de $\sqrt{2}$ ★★★

1. Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, fraction **irréductible**.
Alors $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p est pair. On pose $p = 2k$.
On obtient $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair.
p et q sont tous deux divisibles par 2 : **contradiction** avec « $\frac{p}{q}$ irréductible ». $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2. Supposons $a + b\sqrt{2} = 0$ avec $b \neq 0$. Alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (quotient de deux rationnels) : contradiction avec la question 1.
Donc $b = 0$, puis $a = -b\sqrt{2} = 0$. $a = b = 0$

Exercice 13 — Contre-exemple ★

Rappel. Pour montrer qu'une proposition « $\forall x,\ P(x)$ » est fausse, il suffit d'exhiber un x pour lequel $P(x)$ est fausse.

1. $x = \frac{1}{2} \in [0;1]$: $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. **Fausse**
2. $x = -1 \in \mathbb{R}^*$: $x + \frac{1}{x} = -2 < 2$. **Fausse**
3. $a = b = 1$: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$ et $a + b = 2$; $\sqrt{2} \neq 2$. **Fausse**

Exercice 14 — Réfuter une proposition ★★

1. Prenons $a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$. On a bien $a \neq b$ et $c \neq d$, mais $a + c = 3 = b + d$.
L'hypothèse est vraie et la conclusion fausse :
la proposition est fausse
2. Négation : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}),\ x^2 - xy + y^2 \neq 0$.
Prenons $x = 1$: l'équation $y^2 - y + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, elle n'a aucune solution réelle. La négation est vraie : **la proposition est fausse**

Exercice 15 — Récurrence : sommes ★

Méthode. (1) Initialisation : vérifier la propriété au premier rang. (2) Hérédité : supposer $P(n)$ vraie et démontrer $P(n+1)$. (3) Conclusion.

1. **Initialisation** $(n=1)$: $1 = \frac{1\times 2}{2}$. Vrai.
   Hérédité : supposons $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors
   $$1+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
   Conclusion : vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2. **Initialisation** $(n=1)$: $1 = 1^2$. Vrai.
   Hérédité : supposons $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$. Le terme suivant est $2(n+1)-1 = 2n+1$:
   $$n^2+(2n+1) = (n+1)^2$$
   Conclusion : vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 16 — Récurrence : divisibilité ★★

1. **Initialisation** $(n=0)$: $0^3+0 = 0 = 3\times 0$. Vrai.
   Hérédité : supposons $n^3+2n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors
   $$(n+1)^3+2(n+1) = (n^3+2n)+3n^2+3n+3 = 3(k+n^2+n+1)$$
   Conclusion : n^3+2n est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. **Initialisation** $(n=0)$: $7^0-1 = 0 = 6\times 0$. Vrai.
   Hérédité : supposons $7^n-1 = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors
   $$7^{n+1}-1 = 7(7^n-1)+6 = 6(7k+1)$$
   Conclusion : 7^n-1 est divisible par 6 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 17 — Récurrence : inégalités ★★

1. **Initialisation** $(n=0)$: $3^0 = 1 \geq 1$. Vrai.
   Hérédité : supposons $3^n \geq 1+2n$. Alors
   $$3^{n+1} = 3\times 3^n \geq 3+6n = \big(1+2(n+1)\big)+4n \geq 1+2(n+1)$$
   Conclusion : $3^n \geq 1+2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. **Initialisation** $(n=5)$: $2^5 = 32 \geq 30$. Vrai.
   Hérédité : soit $n \geq 5$, supposons $2^n \geq 6n$. Alors
   $$2^{n+1} = 2\times 2^n \geq 12n = 6(n+1)+6(n-1) \geq 6(n+1)$$
   car $n-1 \geq 0$. **Conclusion** : $2^n \geq 6n$ pour tout $n \geq 5$

Exercice 18 — Somme des carrés ★★

Initialisation $(n=1)$: $1^2 = 1$ et $\frac{1\times 2\times 3}{6} = 1$. Vrai.

Hérédité : supposons $1^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors

$$1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)\big[n(2n+1)+6(n+1)\big]}{6}$$

Or $n(2n+1)+6(n+1) = 2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3)$, donc la somme vaut

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$, car $n+2 = (n+1)+1$ et $2n+3 = 2(n+1)+1$.

Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 19 — L'initialisation est indispensable ★★★

1. Si $10^n-1 = 9k$, alors
   $$10^{n+1}-1 = 10(10^n-1)+9 = 9(10k+1)$$
   donc $P(n) \implies P(n+1)$.
   Si $10^n+1 = 9k$, alors
   $$10^{n+1}+1 = 10(10^n+1)-9 = 9(10k-1)$$
   donc $Q(n) \implies Q(n+1)$.
2. Il n'a démontré que l'**hérédité**. Sans initialisation, on ne sait pas si la propriété est vraie au moins une fois :
   la récurrence est incomplète
3. $P(0)$: $10^0-1 = 0$ est divisible par 9. Avec l'hérédité :
   $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
   Supposons par l'absurde que $Q(n)$ soit vraie pour un certain n. Comme $P(n)$ est vraie, la différence
   $$(10^n+1)-(10^n-1) = 2$$
   serait divisible par 9 : absurde.
   $Q(n)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 20 — Inégalité de Bernoulli ★★★

1. **Initialisation** $(n=0)$: $(1+a)^0 = 1 \geq 1+0$. Vrai.
   Hérédité : supposons $(1+a)^n \geq 1+na$. Comme $1+a > 0$, on peut multiplier :
   $$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$
   car $na^2 \geq 0$. **Conclusion** :
   $(1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. On applique l'inégalité avec $a = 1 > 0$: $2^n \geq 1+n$