ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Éducation Nationale
AREF Marrakech – Safi
DP : Marrakech
Lycée Qualifiant Toubkal

SAKINE.PRO

1ère Année Bac_Sc

Année Scolaire : 2026 – 2027

Matière : Mathématiques
Enseignant :
Pr. SAKINE BADR

SÉRIE D'EXERCICES N° 01 : NOTIONS DE LOGIQUE

PROPOSITIONS • QUANTIFICATEURS • NÉGATION • RAISONNEMENT DIRECT • DISJONCTION DES CAS • CONTRAPOSÉE • ABSURDE • CONTRE-EXEMPLE • RÉCURRENCE

★ Application directe ★★ Entraînement ★★★ Approfondissement

Exercice 1 — Tables de vérité

Cours § I–II ★

Soient P et Q deux propositions. À l'aide d'une table de vérité, montrer que :

1. la proposition « P ou $\overline{P}$ » est toujours vraie ;
2. $\overline{P \text{ et } Q} \iff \left(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}\right)$ (loi de De Morgan).

Exercice 2 — Écrire avec les quantificateurs

§ III ★

Écrire chaque phrase à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$:

1. Le carré de tout réel est positif ou nul.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres.
4. Certains réels ne sont pas rationnels.

Exercice 3 — Négation et valeur de vérité

Cours § III ★

Donner la négation de chaque proposition, puis sa valeur de vérité (vraie ou fausse) en justifiant :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2 > 0$

2) $(\exists x \in \mathbb{R}),\ x^2 - 2 = 0$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}$

4) $(\forall x \in \mathbb{R}),\ -1 \leq \cos x \leq 1$

5) $(\exists x \in \mathbb{Z}),\ \dfrac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

6) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}),\ n < m$

7) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}),\ y^2 = x$

8) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}),\ x > y$

9) $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2 \geq 4 \implies x \geq 2$

Exercice 4 — Raisonnement direct

§ IV ★

Montrer que :

1. pour tous réels a et b : $a^2 + b^2 = 0 \implies (a = 0 \text{ et } b = 0)$;
2. si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, alors $a + b \in \mathbb{Q}$;
3. pour tout réel $x > 0$: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 5 — Démontrer une implication

§ IV ★★

1. Soit $x \geq 0$. Montrer que : $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies x = 0$.
2. Soient a et b deux réels. Montrer que :
$$a^2 + b^2 = 1 \implies |a + b| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 6 — Raisonnement par équivalence

§ IV ★★

1. Soit x un réel. Montrer que :
$$|x - 1| \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2}{5} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{3}$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x^2+1} = 2x$.

Exercice 7 — Disjonction des cas (entiers)

§ IV ★

Soit n un entier naturel. En distinguant les cas, montrer que :

1. $n(n+1)$ est un nombre pair ;
2. $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

Exercice 8 — Disjonction des cas (valeur absolue)

§ IV ★★

1. Montrer que pour tout réel x : $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x - 1| + 2x - 3 \geq 0$.

Exercice 9 — Raisonnement par contraposée

§ IV ★

Montrer par contraposée que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$: n^2 pair $\implies n$ pair ;
2. pour tout réel $x \neq -5$: $x \neq -8 \implies \dfrac{x+2}{x+5} \neq 2$.

Exercice 10 — Contraposée à deux variables

Cours § IV ★★

Soient x et y deux réels. Montrer par contraposée que :

1) $x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

2) $(x \neq 2 \text{ et } y \neq 2) \implies 2x + 2y - xy - 2 \neq 2$

Exercice 11 — Raisonnement par l'absurde

§ IV ★★

Montrer par l'absurde que :

1. si $a > 0, b > 0$ et $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$, alors $a = b$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 12 — Irrationalité de $\sqrt{2}$

§ IV ★★★

1. On rappelle que si p^2 est pair alors p est pair (exercice 9). Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soient a et b deux rationnels. En déduire que :

$$a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$$

Exercice 13 — Contre-exemple

§ IV ★

Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que chaque proposition est fausse :

1. $(\forall x \in [0;1]),\ x^2 \geq x$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}^*),\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$
3. $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2),\ \sqrt{a^2+b^2} = a + b$

Exercice 14 — Réfuter une proposition

§ IV ★★

Montrer que chacune des propositions suivantes est fausse :

1. $(\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4),\ (a \neq b \text{ et } c \neq d) \implies a + c \neq b + d$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}),\ x^2 - xy + y^2 = 0$

Exercice 15 — Récurrence : sommes

§ IV ★

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Exercice 16 — Récurrence : divisibilité

§ IV ★★

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n^3 + 2n$ est divisible par 3 ;
2. $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 17 — Récurrence : inégalités

§ IV ★★

Montrer par récurrence que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3^n \geq 1 + 2n$;
2. pour tout entier $n \geq 5$: $2^n \geq 6n$.

Exercice 18 — Somme des carrés

§ IV ★★

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 19 — L'initialisation est indispensable

§ IV ★★★

On note $P(n)$: « $10^n - 1$ est divisible par 9 » et $Q(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 ».

1. Montrer que $P(n) \implies P(n+1)$ et que $Q(n) \implies Q(n+1)$.
2. Un élève conclut : « $P(n)$ et $Q(n)$ sont vraies pour tout n ». Pourquoi a-t-il tort ?
3. Montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $Q(n)$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 — Inégalité de Bernoulli

§ IV ★★★

Soit a un réel strictement positif.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

2. Application : montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron : c'est en s'entraînant régulièrement que l'on progresse en mathématiques. »